Demostración del Teorema de Fermat por inducción

1- Proposición

Si $n \geq 2$ es entero, el número $(a^3 + b^3)^{1/n}$ con a y b enteros y positivos, es irracional.

Si fuese $(a^3 + b^3)^{1/n} = p/q$ racional irreducible, los números p y q serían primos entre si. Se cumpliría $a^3 + b^3 = p^n/q^n$, y como $a^3 + b^3$ es entero positivo, q^n sería divisor de p^n. Ahora bien, si p y q son primos entre si, también son primos entre si sus potencias n-simas y sus razones no pueden ser números enteros. En consecuencia $(a^3 + b^3)^{1/n}$ no puede ser un número racional, y contrariamente a lo supuesto, será irracional.

2- Aplicación del método de inducción

La proposición de Fermat afirma que la ecuación $a^n + b^n = c^n$ no tiene solución en a, b, c, enteros y positivos si n es entero mayor que 2.

Se admite como demostrado que dados a y b enteros y positivos cualesquiera, no existe ningún número entero y positivo c que verifique la ecuación $a^3 + b^3 = c^3$, es decir, que la raíz cúbica de $a^3 + b^3$, $(a^3 + b^3)^{1/3}$ es un número positivo irracional.

Se supone que para un entero dado $n > 3$, y dos enteros positivos cualesquiera, a, b, no existe un entero positivo m tal que la terna m, a, b, sea solución de la ecuación $a^n + b^n = m^n$; es decir, se asume la hipótesis de que la raíz n-sima de $a^n + b^n$, $(a^n + b^n)^{1/n}$ con a y b enteros positivos cualesquiera, es un número irracional positivo para un determinado valor de $n \geq 3$ entero.

Se desea demostrar que dados a, b enteros y positivos cualesquiera, no existe ningún entero y positivo d que verifique la ecuación $a^{n+1} + b^{n+1} = d^{n+1}$, o bien, que $(a^{n+1} + b^{n+1})^{1/n+1}$ es un número irracional positivo.

Demostración.

Puesto que el número $(a^n + b^n)^{1/n}$ es irracional y positivo con a y b enteros positivos cualesquiera para un valor entero $n > 3$, $(a^n + b^n)^{1/n}$ no es entero, y por tanto está comprendido entre dos enteros consecutivos m y $m + 1$, a saber,

$$m < (a^n + b^n)^{1/n} < m + 1,$$

de donde,

$$m^n < a^n + b^n < (m + 1)^n$$

que muestra, en efecto, que $a^n + b^n$ no es potencia n-sima de entero.

La relación entre $a^n + b^n$ y $a^{n+1} + b^{n+1}$ para cualesquiera valores enteros positivos de a, b y $n >2$ es,

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a^n + b^n)(a + b) - a^n b - ab^n = (a^n + b^n)(a + b) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$$

formula recurrente, pues se tiene,

$$a^{n-1} + b^{n-1} = (a^{n-2} + b^{n-2})(a + b) - ab(a^{n-3} + b^{n-3})$$

de donde,

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a^n + b^n)(a + b) - ab[(a^{n-2} + b^{n-2})(a + b) - ab(a^{n-3} + b^{n-3})]$$

o bien,

$$a^{n+1} + b^{n+1} = [\, a^n + b^n - ab(a^{n-2} + b^{n-2})]\,(a + b) - ab(a^{n-3} + b^{n-3})$$

etc.

Los casos posibles a considerar son: n impar y n par.
Caso n impar.
Aplicando a $a^{n-3} + b^{n-3}$ de la última expresión, y sucesivamente, a las sumas $a^{n-(2j+1)} + b^{n-(2j+1)}$ que resultan, la misma relación de recurrencia, se obtiene una expresión que es suma de términos cuyo último sumando, que corresponde al número par $j = (n-1)/2$, posee como factor la suma $a^{n-n} + b^{n-n} = 2$ y se reduce con A entero, a la forma,

$$a^{n+1} + b^{n+1} = \mathrm{A}(a+b) + (\, a^{n-n} + b^{n-n}\,)a^{n-3}b^{n-3} = \mathrm{A}(a+b) + 2a^{n-3}b^{n-3}\ ,$$

por lo tanto será,

$$(a^{n+1} + b^{n+1})^{1/(n+1)} =[\mathrm{A}(a+b) + 2a^{n-3}b^{n-3}]^{1/(n+1)}$$

Ahora bien, uno al menos de los sumandos del desarrollo del segundo miembro de esta expresión, contiene el factor de $2^{1/(n+1)}$ que es irracional, luego $(a^{n+1} + b^{n+1})^{1/(n+1)}$ es irracional y estará comprendido entre los enteros consecutivos p y p +1, de modo que se cumplirá,

$$p < (a^{n+1} + b^{n+1})^{1/n+1} < p + 1,$$

de donde,

$$p^{n+1} < (a^{n+1} + b^{n+1}) < (p+1)^{n+1},$$

y $a^{n+1} + b^{n+1}$ no será potencia n +1-ésima de entero.
Se cumple por lo tanto, si n es impar y se admite por hipótesis que $a^n + b^n$ no es potencia n-sima de entero, que $a^{n+1} + b^{n+1}$ tampoco es potencia n +1-ésima de entero, y la proposición de Fermat es cierta para el caso n impar.
Caso n par.
Se tiene igualmente,

$$a^{n+1} + b^{n+1} = [\, a^n + b^n - ab(a^{n-2} + b^{n-2})]\,(a+b) - ab(a^{n-3} + b^{n-3})$$

y aplicando la misma relación a las sucesivas sumas $a^{n-(2j+1)} + b^{n-(2j+1)}$, cuyos exponentes son los números impares $n - (2j+1)$ se obtiene, para $a^{n+1} + b^{n+1}$, una expresión que consta de una suma de términos de los cuales al menos uno posee $a^3 + b^3$ como factor, expresión que se reduce, con A, B, enteros, a la forma,

$$a^{n+1} + b^{n+1} = \mathrm{A}(a+b) + \mathrm{B}(a^3 + b^3)$$

Se tendrá con esto,

$$(a^{n+1} + b^{n+1})^{1/(n+1)} = [\mathrm{A}(a+b) + \mathrm{B}(a^3 + b^3)]^{1/(n+1)}$$

Ahora bien, el desarrollo del segundo miembro de esta expresión contiene al menos un sumando con el factor $(a^3 + b^3)^{1/(n+1)}$ irracional, por la proposición demostrada más arriba; por lo tanto, el número $(a^{n+1} + b^{n+1})^{1/n+1}$ es irracional y está comprendido entre dos enteros consecutivos en el caso n par, y la suma $a^{n+1} + b^{n+1}$ no es potencia n +1-ésima de entero si $a^n + b^n$ no es potencia n-sima de entero en el supuesto n par.
En consecuencia, la ecuación $a^n + b^n = m^n$ con a, b y $n \geq 3$ enteros positivos, no se cumple si m es entero positivo, y la Proposición de Fermat es verdadera.