Hola, Luis.

Que el razonamiento no pueda darse para $p = 2$ viene dado por el hecho de saber de antemano que $m^2 + 1$ es un cuadrado perfecto, por lo que la serie $\dfrac{\ln(m^p+1)}{p}$ se puede escribir de dos formas diferentes, totalmente equivalentes, tal y como te he comentado.

Afirmas: Que el desarrollo en serie de $\dfrac{\ln(m^p+1)}{p}$ se pueda escribir de dos formas distintas no significa que no se pueda escribir en la forma $\ln(1+q)$. Cierto, solo que en este caso q no sería racional. Yo hablo de intentar ver *si se puede escribir* de la forma $\ln(1+q)$, con q racional, que es la que me garantiza que es el logaritmo neperiano de un número racional.

Del hecho de que los términos sean distintos, no se deduce que las sumas sumen distinto. Cierto, pero si las sumas suman igual tendría que poder conseguir que los términos sean iguales, por ejemplo como hemos simplificado antes.

Dices que mi empresa es difícil; porque quiero probar que dos series no suman lo mismo. Y las series pueden parecer muy diferentes pero dan la misma suma.

En el caso que nos ocupa hablamos de serie de logaritmos, que no son muy diferentes entre sí. El matiz vendría a ser que una serie es el logaritmo neperiano de un número racional y la otra, el logaritmo neperiano de un número irracional (aunque esto último es lo que se pretende probar)

Te explico con ejemplos:

Si quiero expresar el logaritmo neperiano de un número irracional como una serie de potencias, puedo hacerlo de dos formas:

a) Como serie de potencias de términos racionales

b) Como serie de potencias de términos irracionales

Por ejemplo, si sabemos que $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - ...$,

$$\ln\left(\sqrt{2}\right) = \ln\left(1+\sqrt{2}-1\right) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^j}{j} = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}-...\right)^j}{j}.$$

La serie $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}-...\right)^j}{j}$ es de términos racionales. Pero es una serie dentro de una serie. Desarrollarla sería una tarea ingente pero sabemos que, al ser el logaritmo de un número irracional, por mucho que lo intente no se puede ajustar a una serie de la forma

$$\ln(q+1) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(q)^j}{j} \text{ con } q \text{ racional}$$

Realmente quiero probar que una serie no es igual al logaritmo neperiano de un número racional porque no hay forma de que se adapte a la serie que sí es el logaritmo neperiano de un número racional. Es posible que no haya conseguido mi propósito. Pero ahí dejo mis razonamientos.

Saludos

Jesús Álvarez