1. Ecuación diferencial equivalente a un sistema

Se considera la ecuación diferencial lineal real de coeficientes constantes

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

(a) Transformarla en un sistema diferencial de primer orden.
(b) Usando el apartado anterior, resolver el problema de valor inicial

$$x''' - x'' - 8x' + 12x = 0\ , \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = -2$$

Resolución. (a) Denotando $y_1 = x,\ y_2 = x', , \ldots, y_n = x^{(n-1)}$ obtenemos

$$\left\{\begin{matrix} y_1' = x' = y_2 \\ y_2' = x'' = y_3 \\ \ldots \\ y_n' = x^{(n)} = -a_0 x - a_1 x' - \ldots - a_{n-1}x^{(n-1)} = \\ -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-1} y_n \end{matrix}\right.$$

Relaciones que podemos expresar en la siguiente forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

(b) Según el apartado anterior, el problema dado es equivalente al de valor inicial

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sean $V_2,\ V_{-3}$ los subespacios propios asociados a $\lambda = 2$ y $\lambda = -3$ respectivamente. Tenemos $\dim V_{-3} = 1$ por ser -3 simple y $\dim V_2 = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I) = 3 - 2 = 1$, lo cual implica que A no es diagonalizable. Hallemos una base de Jordan. Para el valor propio $\lambda = 2$ elegimos dos vectores linealmente independientes cumpliendo $Ae_1 = 2e_1$ y $Ae_2 = e_1 + 2e_2$. Resolviendo los sistemas, obtenemos $e_1 = (1, 2, 4)^t$ y $e_2 = (0, 1, 4)^t$. Para el valor propio $\lambda = -3$ elegimos un vector propio e_3, es decir $Ae_3 = e_3$. Resolviendo obtenemos $e_3 = (1, -3, 9)^t$. De las igualdades

$$\begin{cases} Ae_1 = 2e_1 \\ Ae_2 = e_1 + 2e_2 \\ Ae_3 = -3e_3 \end{cases}$$

deducimos que la forma canónica de Jordan de A es

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Una matriz P tal que $P^{-1}AP = J$ es

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = Pe^{tJ}P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Operando, y teniendo en cuenta que sólo necesitamos $y_1 = x$ obtenemos

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{25}\left((6-5t)e^{2t} - 6e^{-3t}\right)}$$

Autor: **Fernando Revilla**