

# 1. Sistemas diferenciales lineales no homogéneos con coeficientes constantes

Resolver los siguientes sistema diferenciales:

$$(a) X' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^t \end{bmatrix}, \text{ con la condición } X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
$$(b) X' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con la condición } X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Resolución.** Recordemos el siguiente teorema: sea el sistema diferencial lineal no homogéneo con coeficientes constantes  $X' = AX + b(t)$  en donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua. Entonces, dado  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe una única solución del sistema cumpliendo  $X(t_0) = X_0$ . Dicha solución es

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds \quad (1)$$

(a) Valores propios de  $A$  :

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 3 \text{ (simples)}$$

Subespacios propios:

$$V_2 \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad V_3 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Unas bases respectivas de estos subespacios propios son  $B_2 = \{(1, -2)\}$  y  $B_3 = \{(1, -1)\}$ , por tanto se verifica  $P^{-1}AP = D$  si

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Usando la fórmula (1) :

$$X(t) = e^{tA} X_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds$$

Efectuando los correspondientes cálculos:

$$\begin{aligned} e^{tA} X_0 &= P e^{tD} P^{-1} X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^{2t} + 2e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) \, ds &= e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) \, ds \\ &= P e^{tD} P^{-1} \int_0^t P e^{-sD} P^{-1} b(s) \, ds \\ &= P e^{tD} \int_0^t e^{-sD} P^{-1} b(s) \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-sD} P^{-1} b(s) \, ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} & 0 \\ 0 & e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^s \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-s} \\ -2e^{-2s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-t} \\ e^{-2t} - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P e^{tD} \int_0^t e^{-sD} P^{-1} b(s) \, ds &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-t} \\ e^{-2t} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{2t} - e^{3t} \\ 3e^t - 4e^{2t} + e^{3t} \end{bmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

Sumando las expresiones (2) y (3) obtenemos la solución pedida:

$$X(t) = \begin{bmatrix} -e^t + e^{2t} + e^{3t} \\ 3e^t - 2e^{2t} - e^{3t} \end{bmatrix}$$

(b) La matriz  $A$  es en éste caso una forma normal de Jordan, en consecuencia:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Efectuando los correspondientes cálculos:

$$e^{tA}X_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-sA}b(s) \, ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & 0 & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} se^s \\ e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} e^t(t-1)+1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} \int_0^t e^{-sA}b(s) \, ds &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t(t-1)+1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t-1+e^{-t} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5) \end{aligned}$$

Sumando las expresiones (4) y (5) obtenemos la solución pedida:

$$X(t) = \begin{bmatrix} t-1+e^{-t} \\ (\frac{3}{2}-t)e^{2t}-\frac{1}{2} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Autor: **Fernando Revilla**