Teorema del valor medio de Lagrange

Enunciamos y aplicamos el teorema del valor medio de Lagrange.

Teorema. (Del valor medio de Lagrange) Sea la $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que se verifica:

(i) f es continua en $[a, b]$.
(ii) f es derivable en (a, b).

Entonces, existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Notas: (a) Los valores de c corresponden a los puntos de la gráfica de $y = f(x)$ para los cuales la tangente es paralela al segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. (b) Si $f(a) = f(b)$, obtenemos como caso particular el teorema de Rolle.

EJEMPLO

Comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de Lagrange para la función $f(x) = x - x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$. Hallar el c o los c correspondientes.

Resolución. Veamos que se verifican las hipótesis del teorema. (i) f es evidentemente continua en $[-2, 1]$ (teorema de continuidad de las funciones elementales). (ii) f es derivable en $(-2, 1)$ (teoremas de derivación de funciones elementales) siendo su derivada $f'(x) = 1 - 3x^2$. Como consecuencia del Teorema de Lagrange, existe al menos un $c \in (-2, 1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)}$$

Procedamos a hallar estos valores de c :

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} \\ &\Leftrightarrow 1 - 3c^2 = -2 \\ &\Leftrightarrow c^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow c = 1 \ \vee \ c = -1 \end{aligned}$$

El primer c no pertenece al intervalo $(-2, 1)$ y el segundo, sí.

Solución: $\boxed{c = -1}$

EJERCICIOS

1. Comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de Lagrange para la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ en el intervalo $[1, 3]$. Hallar el c o los c correspondientes. Sol. $c = 2$.

2. Idem para la función $f(x) = x^{4/3}$ en el intervalo $[-1, 1]$. Sol. $c = 0$.

Autor: Fernando Revilla