

## Descomposición en valores singulares

*Propuesto en examen de Álgebra, ETS de Ing. Ind. de la UPM*

Dada la matriz  $A = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$  calcular números  $\sigma_1, \sigma_2$  y matrices  $U, V$

que verifiquen:

a)  $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0$ .

b)  $U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $V \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son ortogonales.

$$c) V^t A U = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Resolución.** El problema es rutinario conociendo el método general. Procedemos a su exposición:

Sea  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Existen matrices unitarias  $Q_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $Q_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tales que  $Q_1^* A Q_2 = S \in \mathbb{R}^{m \times n}$  siendo

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } m < n$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } m > n$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \quad \text{si } m = n$$

con  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$  todos  $\geq 0$  con  $p = \min\{m, n\}$ . A los números  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$  se les llama valores singulares de  $A$ .

Efectivamente, la matriz  $A^*A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  cumple  $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ , por tanto es hermítica. Como consecuencia del teorema espectral existe una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  en  $\mathbb{C}^n$  formada por vectores propios de  $A^*A$ . Sea  $\lambda_i$  valor propio de  $A^*A$  asociado al vector propio  $e_i$  es decir,  $A^*Ae_i = \lambda_i e_i$ . Tenemos

$$e_i^* A^* A e_i = \lambda_i e_i^* e_i = \lambda_i \Rightarrow \lambda_i = (Ae_i)^*(Ae_i) = \langle Ae_i, Ae_i \rangle \geq 0$$

Supondremos sin pérdida de generalidad que

$$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_r > 0, \lambda_{r+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

Llamemos

$$\begin{cases} \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, v_i = \frac{1}{\sigma_i} Ae_i \in \mathbb{C}^m & (i = 1, \dots, r) \\ \sigma_i = 0 & (i = r+1, \dots, p) \text{ con } p = \min\{m, n\} \end{cases}$$

La familia  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es ortonormal. Efectivamente

$$\begin{aligned} (i) \quad \langle v_i, v_j \rangle &= \left( \frac{1}{\sigma_i} Ae_i \right)^* \left( \frac{1}{\sigma_j} Ae_j \right) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} e_i^* A^* A e_j = \\ &= \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} e_i^* e_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (\text{si } i \neq j) \\ (ii) \quad \|v_i\|^2 &= \langle v_i, v_i \rangle = \frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} \langle e_i, e_i \rangle = 1 \|e_i\|^2 = 1 \end{aligned}$$

Podemos por tanto extender a una base ortonormal  $\{v_1, \dots, v_r, \dots, v_m\}$  de  $\mathbb{C}^m$ . Llamando  $Q_1 = [v_1, \dots, v_m]$  y  $Q_2 = [e_1, \dots, e_n]$  tenemos

$$\begin{aligned} Q_1^* A Q_2 &= [v_1, \dots, v_m]^* A [e_1, \dots, e_n] = \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_m^* \end{bmatrix} A [e_1, \dots, e_n] = \\ &= \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_m^* \end{bmatrix} [Ae_1, \dots, Ae_n] = \begin{bmatrix} v_1^* Ae_1 & \dots & v_1^* Ae_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_m^* Ae_1 & \dots & v_m^* Ae_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Veamos qué matriz es  $Q_1^* A Q_2$ :

1) Si  $j > r$ ,  $\|Ae_j\|^2 = \langle Ae_j, Ae_j \rangle = e_j^* A^* Ae_j = \lambda_j e_j^* e_j = 0$ . Es decir  $Ae_j = 0$ .

2) Para todo  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  se verifica

$$\begin{aligned} v_i^* Ae_j &= \frac{1}{\sigma_i} e_i^* A^* Ae_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_i} e_i^* e_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_i} \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j \\ v_i^* Ae_i &= \frac{\lambda_i}{\sigma_i} \langle e_i, e_i \rangle = \sigma_i \end{aligned}$$

3)  $\forall i = r+1, \dots, m$  y  $\forall j = 1, \dots, r$  se verifica

$$v_i^* Ae_j = v_i^* (\sigma_j v_j) = \sigma_j \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ (pues } i \neq j \text{)}$$

En consecuencia tenemos

$$Q_1^* A Q_2 = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ con } \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

Apliquemos ahora este proceso general a la matriz dada.

$$A^* A = A^t A = \dots = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 45 & -3 \\ -3 & 45 \end{bmatrix}$$

Hallemos los valores propios de  $18A^* A$ , para ello restamos a la segunda fila la primera y luego a la primera columna le sumamos la segunda

$$\begin{vmatrix} 45 - \lambda & -3 \\ -3 & 45 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 - \lambda & -3 \\ -48 + \lambda & 48 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 42 - \lambda & -3 \\ 0 & 48 - \lambda \end{vmatrix} = (42 - \lambda)(48 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 42 \vee \lambda = 48$$

Los valores propios de  $A^* A$  son por tanto  $\lambda_1 = 42/18 = 7/3$  y  $\lambda_2 = 48/18 = 8/3$ . Hallemos los subespacios propios asociados a  $A^* A$

$$\ker(A^* A - \lambda_1 I) \equiv \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \ker(A^* A - \lambda_2 I) \equiv \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Unas bases respectivas son  $\{(1, 1)^t\}$  y  $\{(-1, 1)^t\}$ . Una base ortonormal formada por vectores propios de  $A^* A$  es por tanto

$$\{e_1 = (1/\sqrt{2})(1, 1)^t, e_2 = (1/\sqrt{2})(-1, 1)^t\}$$

En consecuencia la matriz  $U$  es

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Los valores singulares son  $\sigma_1 = \sqrt{7/3}$ ,  $\sigma_2 = \sqrt{8/3}$ . Los vectores  $v_1$ ,  $v_2$  son

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A e_1 = \sqrt{\frac{3}{7}} \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A e_2 = \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Extendemos  $v_1, v_2$  a una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Un vector  $v_3 = (x_1, x_2, x_3)^t$  ortogonal a  $v_1$  y  $v_2$  ha de cumplir  $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$  y  $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ . Elegimos por ejemplo  $(3, 2, 1)$ , que normalizándolo obtenemos  $v_3 = (1/\sqrt{14})(3, 2, 1)^t$ . La descomposición pedida es por tanto

$$\begin{bmatrix} 2/\sqrt{21} & -1/\sqrt{21} & -4/\sqrt{21} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{7/3} & 0 \\ 0 & \sqrt{8/3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autor: Fernando Revilla