

## Nuevo 1

Si la ecuación indeterminada  $a^n + b^n = c^n$  con  $n$  simple, tiene solución primitiva,  $a, b, c$ , son tres números enteros, mayores que  $n$ , primos entre sí dos a dos, dos impares y uno par; el mayor es  $c$ , y por tanto es  $a + b < 2c$ .

Como  $n$  es simple,  $a^n, b^n, c^n$  satisfacen las congruencias módulo  $n$ ,

$$a^n = a + nA, \quad b^n = b + nB, \quad c^n = c + nC,$$

de las que se obtiene,

$$a + b - c = a^n + b^n - c^n + n(C - A - B),$$

donde  $a + b - c$  y  $a^n + b^n - c^n$  son pares, y por tanto  $C - A - B$  es par si  $n$  es simple impar, y será en este caso, con  $C - A - B = 2d$ ,

$$a + b - c = a^n + b^n - c^n + 2dn,$$

y si es  $a^n + b^n - c^n = 0$  se tiene,

$$a + b - c = 2dn, \quad (1)$$

donde  $a, b$ , son de paridades opuestas y  $c$  es impar, con el resultado de que la diferencia  $a + b - c$  es un múltiplo, par, del exponente simple  $n$  impar, si la ecuación indeterminada  $a^n + b^n - c^n = 0$  se satisface. Será pues,  $c < a + b < 2c$ , y  $2dn < c$ .

Si se cumple  $a^n + b^n - c^n = 0$  será,

$$a^n + b^n = c^n = c + nC = a + b - 2dn + nC = a + b + nD. \quad (2)$$

Por otro lado, se tiene,

$$a^n + b^n = (a + b)E, \quad (3)$$

y de (2) y (3),

$$(a^n + b^n)(E - 1) = n \cdot D \cdot E$$

o bien,

$$a^n + b^n = \frac{nDE}{E-1}.$$

Como  $n \frac{DE}{E-1}$  es entero será  $n \frac{D}{E-1}$  entero y serán posibles los casos

a)  $E - 1 = kn$  y  $\frac{D}{k}$  entero, con  $k$  entero positivo

b)  $\frac{D}{E-1}$  entero.

En el supuesto a) se tiene, de  $a^n + b^n = (a + b)E$ ,

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = 1 + kn \quad (4)$$

$$\frac{a + nA + b + nB}{a + b} = 1 + kn,$$

$$1 + n \frac{A+B}{a+b} = 1 + kn,$$

y el entero  $k$  estará dado por,

$$\frac{A+B}{a+b} = k. \quad (5)$$

donde es,

$$A + B = \frac{1}{n} [a^n + b^n - (a + b)]$$

Es decir, si se cumple  $a^n + b^n - c^n = 0$ , y es cierto el supuesto a),  $a + b$  es divisor de

$$A + B = \frac{1}{n} [a^n + b^n - (a + b)]$$

Por otro lado, con  $a^n + b^n = c + nC$ , y  $a + b = c + 2nd$  de (1), (4) se puede poner como,

$$\frac{c + nC}{c + 2nd} = 1 + kn,$$

de donde,

$$C = ck + 2d + 2dkn,$$

y será  $(C - ck - 2d):n$ , y teniendo en cuenta (5) y (1), será,

$$[C - c \frac{A+B}{a+b} - \frac{a+b-c}{n}]:n, \quad ,$$

y se cumplirá también la siguiente divisibilidad,

$$[(a + b)nC + cn(A + B) - (a + b)(a + b - c)]:n$$

de la que se sigue,

$$(a + b)(a + b - c) = (a + b)[a^n - nA + b^n - nB - (c^n - nC)]:n$$

y será,

$$(a + b)(a^n + b^n - c^n) = m.n,$$

y si se satisface la ecuación  $a^n + b^n - c^n = 0$  será finalmente,

$$a + b = \frac{mn}{0},$$

resultado no admisible en ecuaciones diofánticas.

En consecuencia, deberá ser cierto el supuesto b)  $\frac{D}{E-1} = k$  entero positivo, considerado en el intento citado, y será  $a^n + b^n = nkE$ , que teniendo en cuenta (3) será,

$$a + b = kn,$$

y por la relación (1) será  $c$  divisible por  $n$ .

Es decir, si la ecuación indeterminada  $a^n + b^n = c^n$  con  $n$  simple impar tiene solución, el exponente  $n$  es divisor del número mayor impar,  $c$ , y de la suma  $a + b$ , también impar, de los dos menores de la terna solución.

Para  $n = 3$  será,

$$c = 3h, \text{ y se tiene, } a^3 + b^3 = 3^3 h^3, \quad a + b = 3(h + 2d) = 3k,$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = \frac{3^3 h^3}{3k} = a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab = 3^2 k^2 - 3ab,$$

o bien,

$$ab = 3 \left( k^2 - \frac{h^3}{k} \right), \quad (5)$$

y  $\frac{3h^3}{k}$  será entero o el factor entre paréntesis será entero.

En el primer supuesto, si  $k = 3w$ , será  $a + b = 3^2w$ , con  $w$  impar divisor de  $h^3$ , y  $a$  y  $b$  de paridades opuestas y no múltiplos de 3 porque es  $c = 3h$ , con  $h$  impar porque lo es  $c$ .

Será  $3w - 2d = h$ , y dado  $w$  impar, el único valor de  $h$  impar, menor que  $3w$ , que satisface esta igualdad y cuyo cubo es divisible por  $w$  es  $h = w$  y sería  $d = w$  y  $a + b = 3^2h$  y  $c = 3h$ .

Ahora bien,  $a, b, c$ , son tres números diferentes y  $c$  es el mayor, por lo tanto, es  $a + b < 2c = 6h$ , relación que no se cumple con el resultado obtenido  $a + b = 9h$  en este supuesto. En consecuencia es cierto el supuesto de que es entero el factor entre paréntesis de (5) como se asume en el intento, y  $a$  o  $b$  será múltiplo del exponente 3, y la solución de la ecuación cúbica, y para todos los demás exponentes, no será de primos entre si tomados de dos en dos como se requiere.