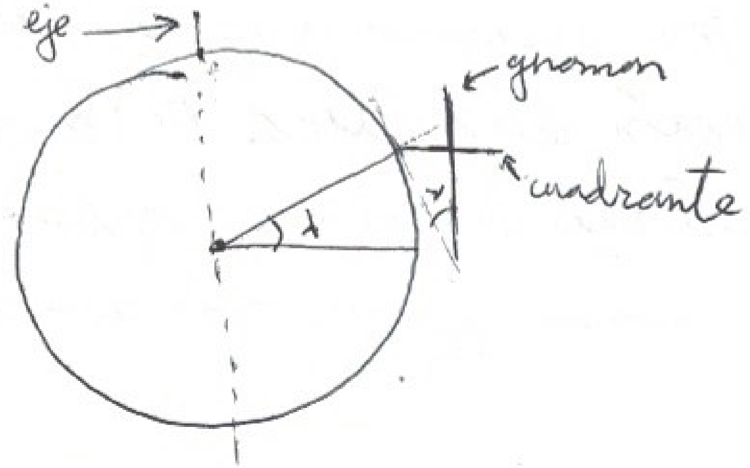
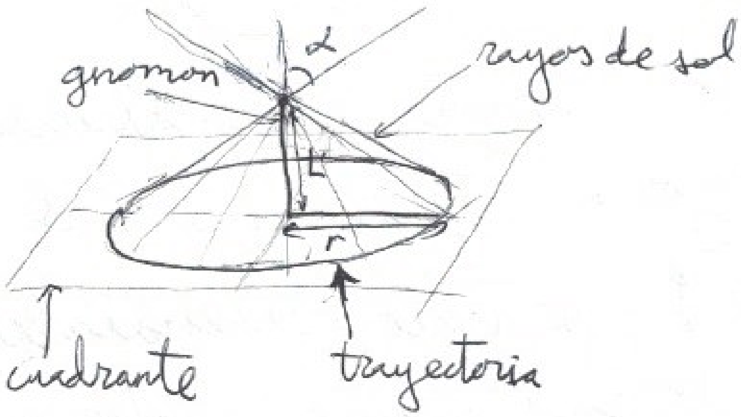
CUADRANTE ECUATORIAL



Se desea dibujar un cuadrante perpendicular al eje de la Tierra. Hay que entender que si el gnomon es paralelo al eje ⫽ y por tanto perpendicular al cuadrante, la sombra barrerá ángulos iguales en tiempos iguales. Es decir, cada hora barrerá $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$

También hay que darse cuenta que a la hora XII la sombra será vertical y que para que el gnomon sea paralelo al eje de la Tierra éste debe formar con ~~la Tierra~~ el plano horizontal un ángulo igual a la latitud del lugar (λ), tal y como muestra el dibujo.

Si queremos dibujar la trayectoria de la sombra de un punto del gnomon (la punta) sobre el cuadrante a lo largo de un día habrá que considerar que los rayos del Sol forman durante el día un ángulo constante α con el ~~gnomon~~ gnomon. La curva que buscamos es la intersección de un cono de revolución con el plano. En el caso del cuadrante sea ecuatorial el plano es perpendicular al eje del cono (gnomon) y las curvas son circunferencias.



El radio de estas circunferencia es:

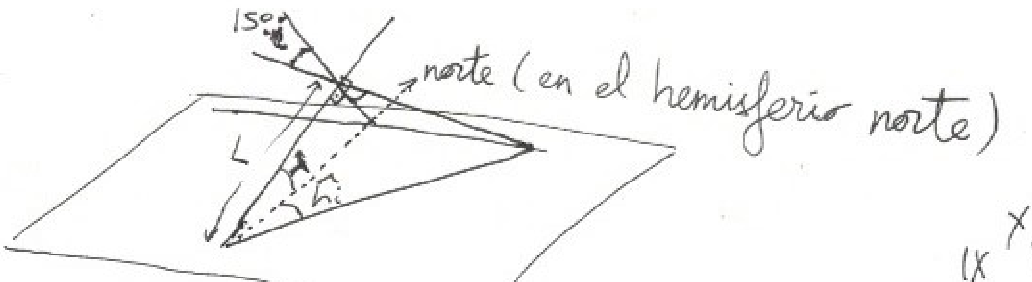
$$r = L \cdot tg\,\alpha$$

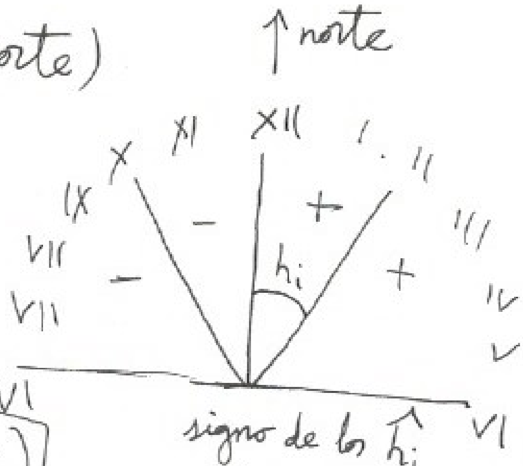
siendo L la longitud del gnomon.

Notar que la cara norte del cuadrante trabaja en ~~pr~~ la primavera y el verano septentrionales y la sur en otoño e invierno.

CUADRANTE HORIZONTAL

Para entender el cuadrante horizontal se imaginan los planos que contienen el gnomon y cada una de las líneas horarias del cuadrante ecuatorial. Las líneas horarias del horizontal serán las intersecciones de estos planos con el horizontal.





signo de los $\hat{h}_i$

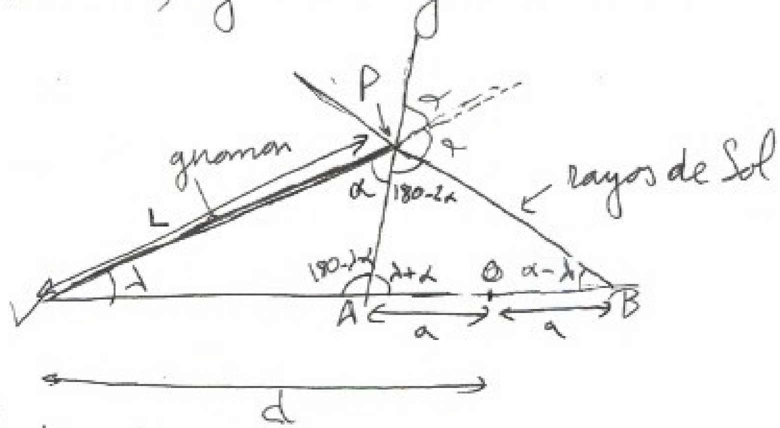
$$\boxed{\operatorname{tg}\hat{h}_i = \frac{L\cdot \operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{tg}(15°\cdot i)}{(L/\cos\lambda)} = \sin\lambda \cdot \operatorname{tg}(15°\cdot i)}$$

donde i es:

i	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
hora solar	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI

Para hallar la curva que describe la sombra de la punta del gnomon el día en que los rayos solares forman un ángulo $\underline{\underline{\alpha}}$ con el eje terrestre se busca la intersección de un cono de revolución con vértice en la punta del gnomon, eje el propio gnomon y ángulo entre eje y generatriz α. Estas curvas son hipérbolas en las regiones templadas (recta doble en el equinoccio) y alguna de ellas es elíptica dentro de los círculos polares.

En el caso de que sean hipérbolas, se pueden hallar el centro y el eje real con una vista lateral del cono, gnomon y cuadrante



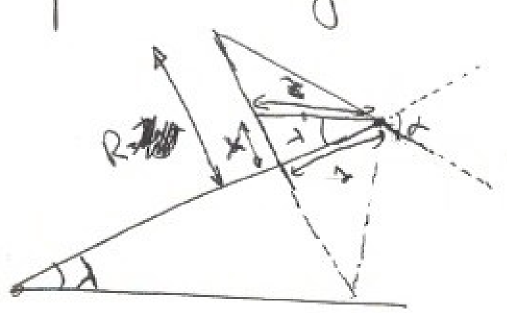
P: punta del gnomon
V: vértice del cuadrante
A y B: vértices de la hipérbola.
O: centro de la hipérbola.

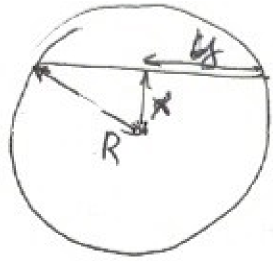
Aplicando el Teorema del seno a los triángulos $\widehat{VAP}$ y $\widehat{VBP}$ se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{L}{\sin(180-\lambda-\alpha)} = \dfrac{d-a}{\sin\alpha} \\[2ex] \dfrac{L}{\sin(\alpha-\lambda)} = \dfrac{d+a}{\sin(180-\alpha)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d-a = \dfrac{L\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\lambda)} \\[2ex] d+a = \dfrac{L\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha-\lambda)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} d = \dfrac{L\cdot\sin\alpha}{2}\left(\dfrac{1}{\sin(\alpha+\lambda)} + \dfrac{1}{\sin(\alpha-\lambda)}\right) \\[2ex] a = \dfrac{L\cdot\sin\alpha}{2}\left(\dfrac{1}{\sin(\alpha-\lambda)} - \dfrac{1}{\sin(\alpha+\lambda)}\right) \end{array}}$$

Para hallar el ángulo entre las asíntotas hay que tener en cuenta que éste ángulo es el mismo que el que forman las dos rectas intersección del cono con un plano paralelo al cuadrante que pase por la punta del gnomon. Llamando 2β a ése ángulo, se tiene que, pensando en una sección recta del cono a una distancia unidad de la punta del gnomon:

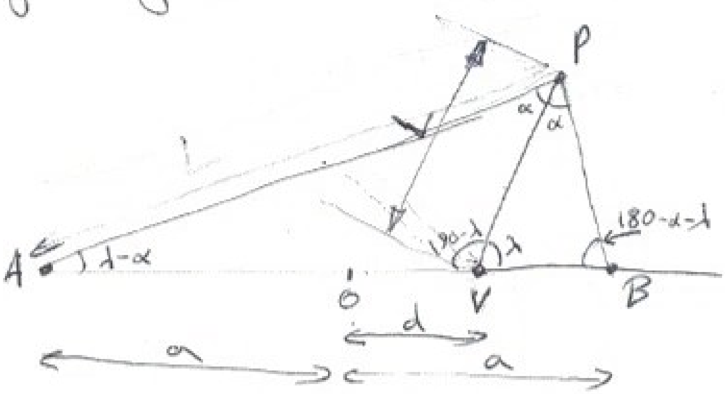




$$x = \operatorname{tg}\lambda \; ; \; y = \sqrt{R^2 - b^2} \; ; \; R = \operatorname{tg}\alpha \implies$$

$$\left.\begin{array}{l} b = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\lambda} \\ z = \dfrac{1}{\cos\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{z} = \cos\lambda\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\lambda}}$$

En el caso de que las curvas sean elipses el procedimiento es similar. Para hallar el centro y el eje mayor, como antes:



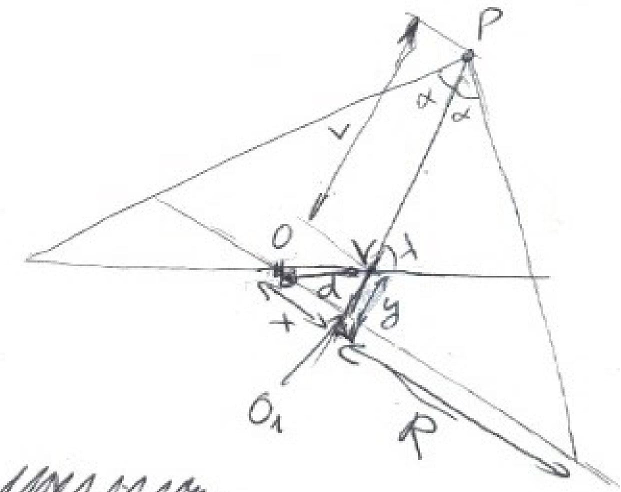
P: punta del gnomon
V: vértice del cuadrante
A y B: vértices de la elipse
O: centro de la elipse

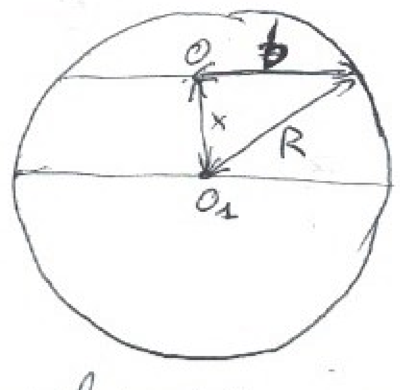
$$\frac{d+a}{\sin\alpha} = \frac{L}{\sin(\lambda-\alpha)} \qquad \qquad d+a = \frac{L\cdot\sin\alpha}{\sin(\lambda-\alpha)}$$

$$\frac{a-d}{\sin\alpha} = \frac{L}{\sin(\alpha+\lambda)} \quad \Rightarrow \quad -d+a = \frac{L\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\lambda)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{L\cdot\sin\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin(\lambda-\alpha)}+\frac{1}{\sin(\lambda+\alpha)}\right) \\ d &= \frac{L\cdot\sin\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin(\lambda-\alpha)}-\frac{1}{\sin(\lambda+\alpha)}\right) \end{aligned}}$$

Para el eje menor hay que considerar la sección recta del cono que pasa por O.





b es el semieje menor de la elipse.

$y = d\cdot\cos\lambda$;

$\cancel{R = (L+y)\,tg\alpha = (L+d\cos\lambda)\cdot tg\alpha}$

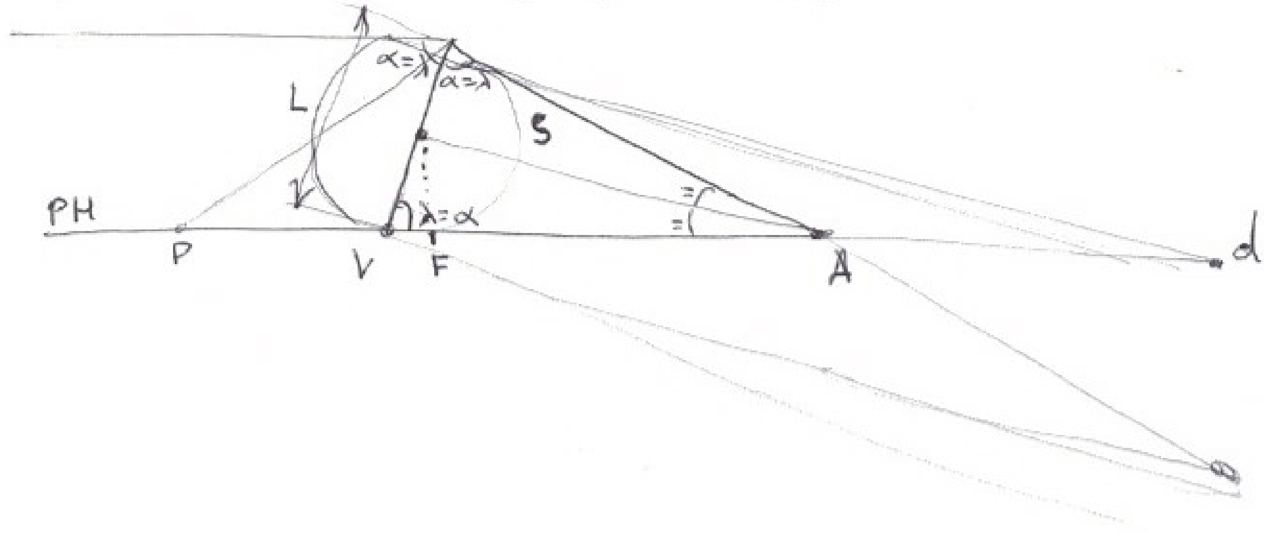
$\cancel{b = \sqrt{x^2+R^2}}$

$R = (L+y)\,tg\,\alpha = (L+d\cos\lambda)\cdot tg\,\alpha$

$b = \sqrt{x^2+R^2}$

Se podría dar también el caso de que la curva que describe la sombra de la punta del gnomon durante un día concreto fuese una parábola. Tal situación se da por ejemplo, teóricamente, en un punto del círculo polar el día de San Juan, o en cualquier otra situación en la que el ángulo $\underline{\underline{\alpha}}$ que forman los rayos de Sol con el eje terrestre coincidiese con la latitud del lugar $\underline{\underline{\lambda}}$.

Para hallar la distancia del vértice $\underline{\underline{V}}$ del cuadrante al vértice $\underline{\underline{A}}$ de la parábola y la de $\underline{\underline{V}}$ al foco $\underline{\underline{F}}$ de la parábola considerar la siguiente sección sobre el plano meridiano, en la que se ha dibujado el cono cuyas generatrices son los rayos de Sol, el plano horizontal y la esfera $\underline{\underline{S}}$ tangente a ambos:



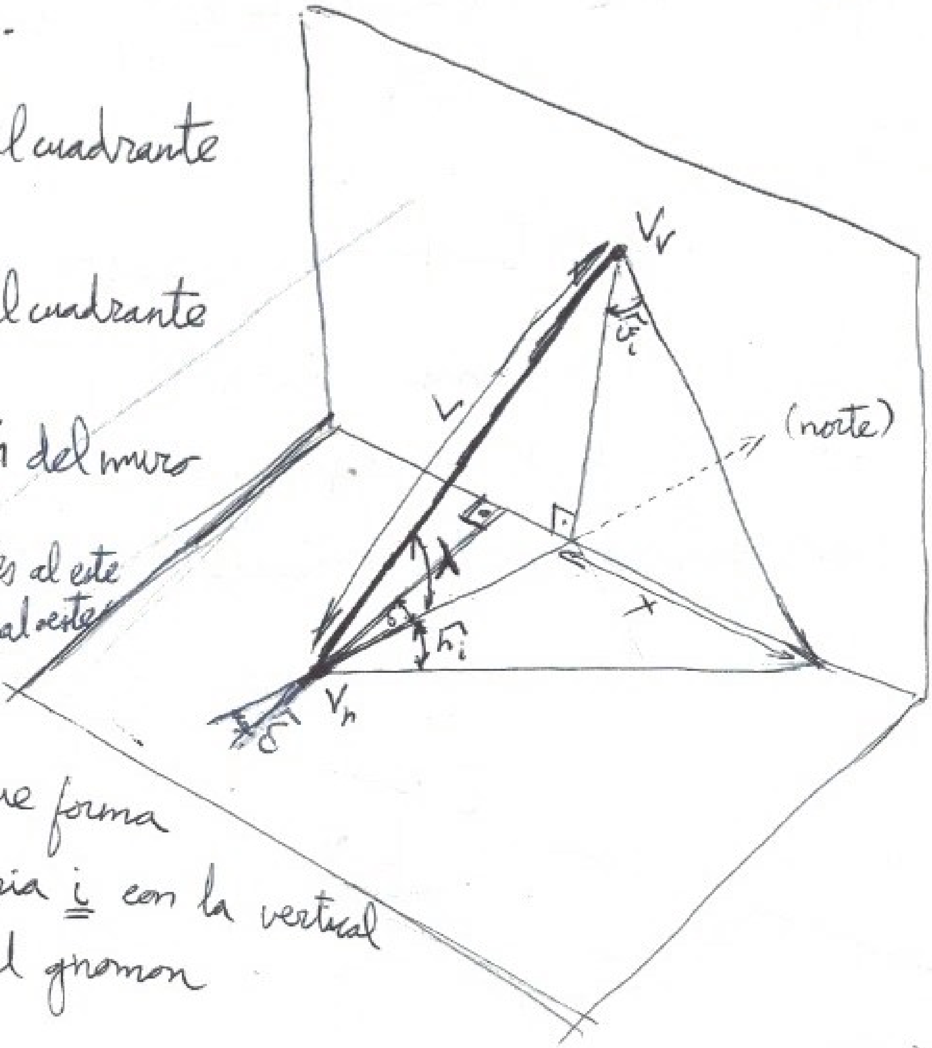
Por propiedades de cónicas, el punto de tangencia de $\underline{\underline{S}}$ con $P\underline{\underline{H}}$ es el foco de la parábola. De donde

$$\boxed{VF = \frac{L}{2}\sin\lambda}$$

$$\boxed{VA = \frac{L}{2\cos\lambda}}$$

CUADRANTE VERTICAL

Para diseñar un cuadrante vertical hay que considerar cómo quedaría el cuadrante horizontal en el lugar.



V_h: vértice del cuadrante horizontal

V_v: vértice del cuadrante vertical

$\hat{\delta}$: declinación del muro o azimut.
+ en los declinantes al este
y − en los declinantes al oeste

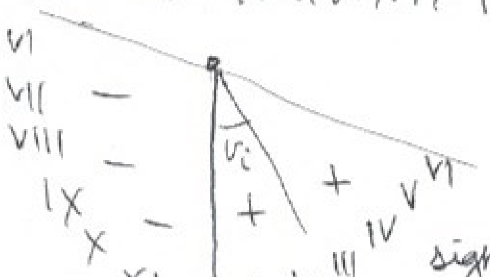
$\hat{v}_i$: ángulo que forma la línea horaria $\underline{i}$ con la vertical

L: longitud del gnomon

λ: latitud

$\hat{h}_i$: ángulo que forma la línea horaria $\underline{i}$, en el cuadrante horizontal, con la meridiana del lugar.

i	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
hora	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI



signo de los $\hat{v}_i$

Se podría calcular $\underline{\underline{x}}$ de dos maneras.

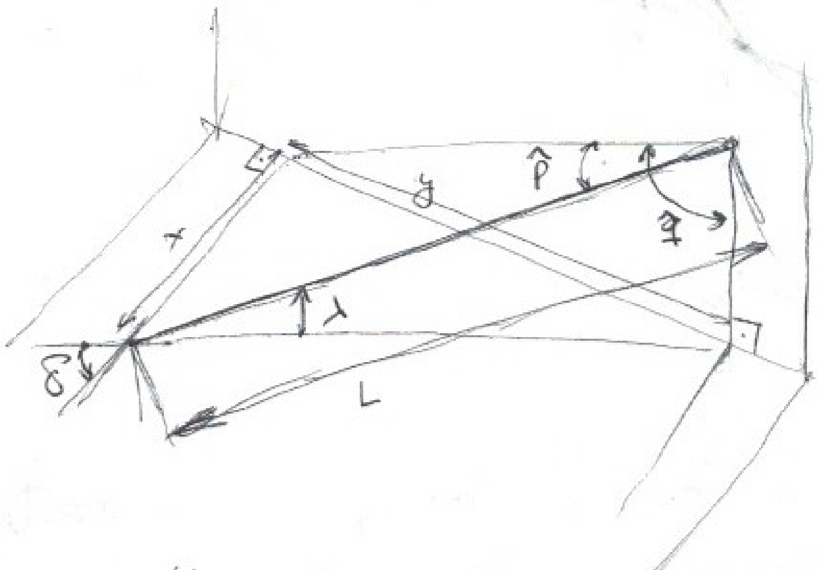
$$\left.\begin{array}{l} x = L \cdot \sin\lambda \cdot \operatorname{tg}\hat{v}_i \\ x = L \cdot \cos\lambda \cdot \cos\hat{\delta}\left(\operatorname{tg}(\delta+\hat{h}_i) - \operatorname{tg}\delta\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\hat{v}_i = \frac{\cos\hat{\delta}\left[\operatorname{tg}(\delta+\hat{h}_i) - \operatorname{tg}\delta\right]}{\operatorname{tg}\lambda} = \frac{\sin\hat{h}_i}{\cos(\delta+\hat{h}_i)\cdot\operatorname{tg}\lambda}}$$

También interesan los ángulos siguientes:

$\hat{p}$: ángulo que forma el gnomon con el plano vertical.

$\hat{q}$: ángulo que forma la proyección del gnomon sobre el plano vertical con la vertical.

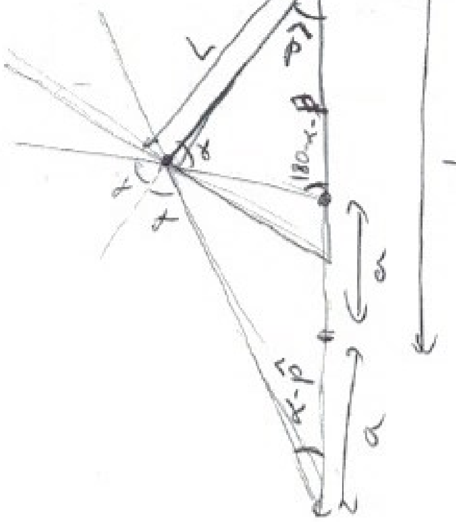


$$\left.\begin{array}{l} x = L \cdot \cos\lambda \cdot \cos\delta = L \cdot \sin\hat{p} \\ y = L \cdot \cos\hat{p} \cdot \sin\hat{q} = L \cos\lambda \sin\delta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sin\hat{p} = \cos\lambda \cdot \cos\delta \\ \sin\hat{q} = \dfrac{\cos\lambda \cdot \sin\delta}{\cos\hat{p}} \end{array}}$$

Para dibujar la curva que describe la punta del gnomon el día que los rayos de Sol forman un ángulo $\underline{\underline{\alpha}}$ con el eje terrestre habrá que considerar el cono que forman los rayos de Sol que pasan por la punta del gnomon y su intersección con el plano vertical del cuadrante.

Estas curvas serán hipérbolas por encima del trópico de Cáncer y por debajo del de Capricornio. En la zona entre trópicos alguna de estas curvas será elíptica.

Para definir estas curvas se procede de forma muy similar a como se hacía en el cuadrante horizontal, sólo que el papel que antes jugaba $\underline{\lambda}$, ahora lo juega $\hat{p}$



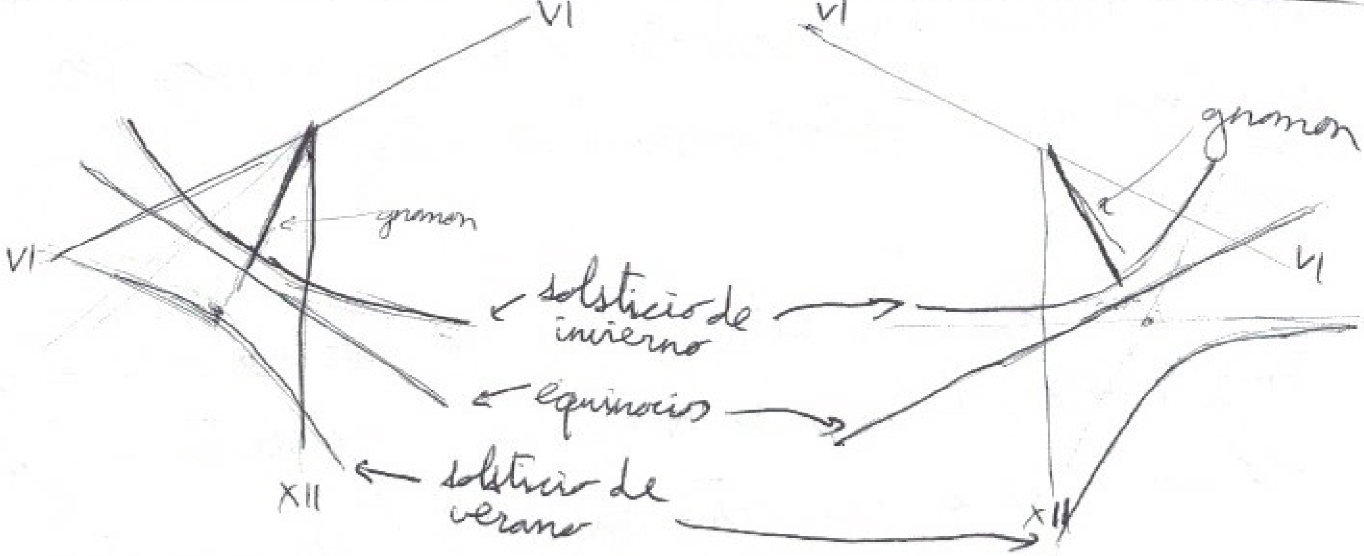
$$\left.\begin{aligned} \frac{L}{\sin(\alpha-\hat{p})} &= \frac{d+a}{\sin(180^\circ-\alpha)} \\ \frac{L}{\sin(180-\hat{p}-\alpha)} &= \frac{d-a}{\sin\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$d = \frac{L \cdot \sin\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin(\alpha+\hat{p})} + \frac{1}{\sin(\alpha-\hat{p})}\right)$$

$$a = \frac{L \cdot \sin\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin(\alpha-\hat{p})} - \frac{1}{\sin(\alpha+\hat{p})}\right)$$

Para hallar el ángulo entre asíntotas, 2β; igualmente:

$$\boxed{tg\,\beta = \cos\hat{p} \cdot \sqrt{tg^2\alpha - tg^2\hat{p}}}$$



Aspectos de dos cuadrantes verticales declinantes a poniente (derecha) y a levante (izquierda) en un punto entre el trópico de Cáncer y el círculo polar ártico

CUADRANTE ANALEMÁTICO

Este cuadrante se traza en el plano horizontal y tiene el gnomon vertical y móvil. Para saber cuál es la hora hay que colocar el gnomon en un punto concreto del suelo según la fecha en la que nos encontremos y la intersección de su sombra con una sombra fija del plano horizontal (PH) nos la da.

Estos relojes tienen la interesante propiedad de que no es necesario que el gnomon tenga una altura concreta para que marque correctamente las horas. Esto hace que se presten a ser dibujados en un lugar señalado para invitar a que quien lo vea haga el papel de gnomon situando sus pies en uno de los puntos indicados según la fecha.

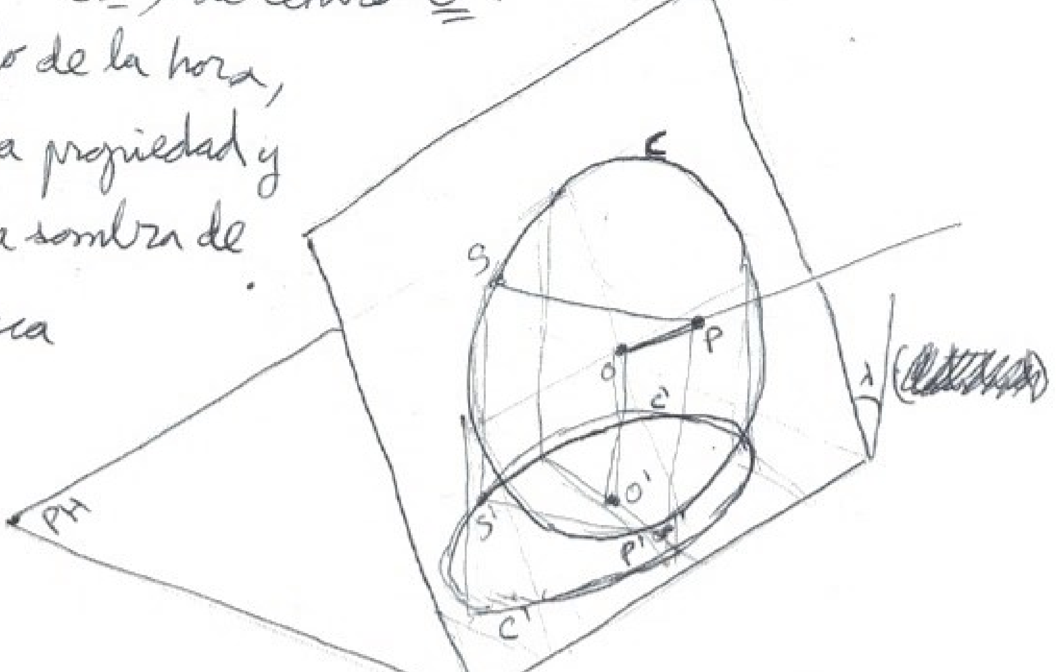
Para entender en qué se basa su funcionamiento consideremos un reloj ecuatorial sobre el que se proyecta la sombra de un punto (P) situado sobre un gnomon paralelo al eje de la Tierra. Sabemos que dicha sombra recorrerá a lo largo del día una circunferencia completa y que cubrirá sobre ella arcos a razón de 15°/hora. La idea es ir moviendo, a lo largo del gnomon y según la fecha, el punto que proyecta la sombra para que ésta recorra la misma circunferencia todos los días del año.

Consiguiendo esto también se conseguirá, además, que en una hora concreta del día la sombra se halle en el mismo punto de la cirunferencia, sea la fecha que sea. Esto se debe, simplemente, a las propiedades del cuadrante ecuatorial.

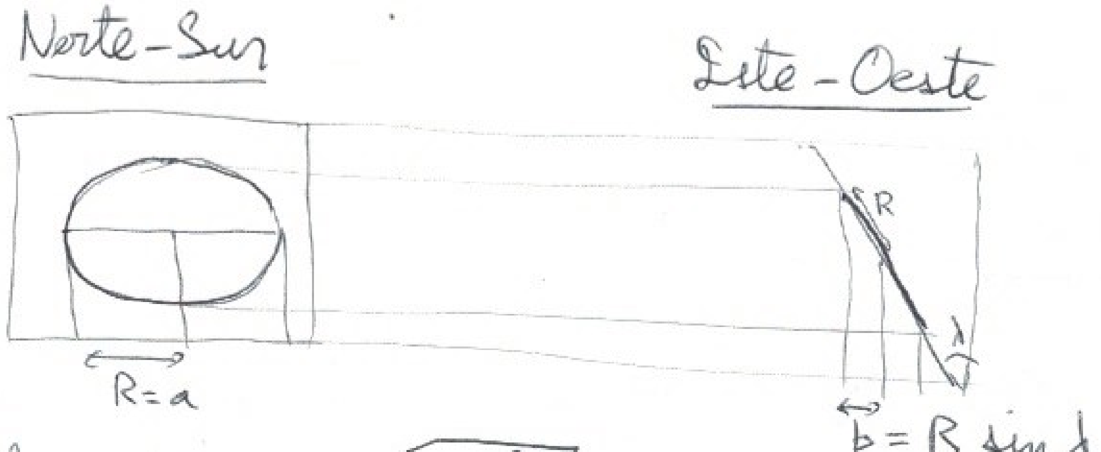
Entonces, llamemos: c a la cirunferencia sobre el plano ecuatorial, O su centro, r a la vertical por P, S a la sombra de P sobre c, P' la proyección vertical de P sobre PH, y S' la correspondiente a S y O' la de O. También llamemos λ a la latitud.

Observemos que si r es el gnomon del cuadrante, entonces el plano que contiene r y P contiene el Sol, y sus puntos S', P' y la recta que los une están a la sombra. Como S' es la proyección de S y éste se halla sobre c, entonces S' está en la proyección de c, que será una elipse (c') de centro O'.

Por depender S sólo de la hora, también tiene S' esa propiedad y la intersección de la sombra de r con c' nos marca la hora :)



Para hallar los parámetros de la elipse consideremos las vistas del dibujo anterior en las direcciones Norte-Sur y Este-Oeste. Llamando $\underline{\underline{R}}$ al radio de $\underline{\underline{c}}$ y $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$ a los semiejes mayor y menor de la elipse respectivamente se tiene:



De la primera: $\boxed{a = R}$

Y de la segunda: $\boxed{b = R \sin\lambda}$

Las direcciones de los ejes son Este-Oeste la del mayor y Norte-Sur la del menor.

Con la vista desde la dirección Este-Oeste también se saca el punto P' en el que se debe colocar el gnomon el día en que los rayos de Sol formen un ángulo $\underline{\underline{\alpha}}$ con el eje de la Tierra. Tal punto queda definido por su distancia ($\underline{\underline{d}}$) al centro ($\underline{\underline{O'}}$) de la elipse $\underline{\underline{c'}}$, ya que $\underline{P'}$ se sitúa sobre el eje menor de $\underline{\underline{c'}}$

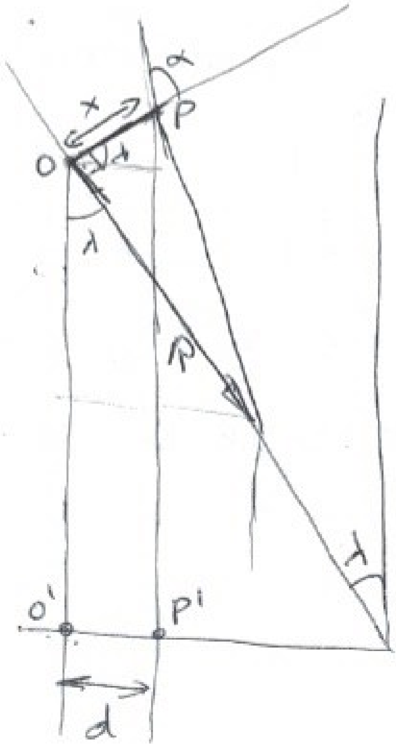
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{x} \Rightarrow$$

$$x = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\cos\lambda = \frac{d}{x} \Rightarrow$$

$$d = x\cdot\cos\lambda \Rightarrow$$

$$\boxed{d = \frac{R\cos\lambda}{\operatorname{tg}\alpha}}$$



Ya sólo queda determinar los puntos de la elipse que nos irán marcando las diferentes horas. Llamemos V al vértice ~~de la elipse, donde~~ Norte de la elipse, en el que se marcarán las XII, $\underline{\underline{t}}$ la tangente en $\underline{\underline{V}}$ a $\underline{\underline{c}}$, S' el punto donde se marca la hora $\underline{\underline{n}}$ y $\underline{\underline{O'}}$, como antes, el centro de $\underline{\underline{c}}$. Consideremos ~~Q~~ también el plano $\underline{\underline{Q}}$ ecuatorial por $\underline{\underline{t}}$, el plano $\underline{\underline{\pi}}$ vértical por $\underline{\underline{S'O'}}$ y $\underline{\underline{T}}$ la intesección de $\underline{\underline{\pi}}$ con $\underline{\underline{t}}$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}(15^\circ n) = \operatorname{tg}(\widehat{TOV}) = \dfrac{\overline{TV}}{R} \\ \operatorname{tg}(S'O'V) = \dfrac{\overline{TV}}{b} \\ \sin\lambda = \dfrac{b}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\widehat{S'O'V} = \frac{\operatorname{tg}(15^\circ n)}{\sin\lambda}}$$