# Cálculo I

Diciembre de 2016

## Examen

18 de febrero de 2017

| N° Parcial | Apellido, Nombre | Firma | Cédula |
|---|---|---|---|
| | | | |

La duración del parcial es de cuatro horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: sea cuidadoso al pasar las respuestas: lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

En esta prueba, se pueden utilizar las derivadas de las funciones usuales ($\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $x^\alpha$, $e^x$, $\log(x)$, $\operatorname{arcsen}(x)$, $\arccos(x)$, etc.) sin justificarlas.

**VERDADERO/FALSO (Total: 10 puntos)**

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Llenar cada casilla con las respuestas **V** (verdadero) o **F** (falso), según corresponda.
**Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.**

**MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 40 puntos)**

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.
**Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.**

**DESARROLLO (Total: 50 puntos)**

Dos ejercicios de desarrollo (25 y 25 puntos) se encuentran en las hojas 3 y 4.

**PARA USO DOCENTE**

| **DES1** | | | | | | **DES2** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
| | | | | | | | | | | |

## Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 10 puntos)

**1.** Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones con límites finitos $A, B \in \mathbb{R}$, respectivamente. Si $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A < B$.

**2.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si existe $k > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la función $f$ es uniformemente continua.

**3.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, y $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) \geq 0$. Entonces necesariamente existe un intervalo $I$ con $a \in I$ tal que la función $f$ es creciente en $I$.

**4.** Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua, negativa y creciente. Entonces la integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge si y sólo si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge.

**5.** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, encontes la imagen de $f$ es un intervalo cerrado.

## Ejercicios: Múltiple opción (Total: 40 puntos)

**1.** Sea $w \in \mathbb{C}$, que satisface la ecuación $w^4 = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})$, y también $\mathrm{Re}(w) < 0$, $\mathrm{Im}(w) > 0$. Definimos $u = (i - 1)w$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $\mathrm{Re}(u) > 0$ e $\mathrm{Im}(u) < 0$
(II) $w^5 = w$
(III) $\mathrm{Re}(u) < 0$ e $\mathrm{Im}(u) < 0$
(IV) $|u| = \sqrt{2}$

(A) Sólo la afirmación IV es correcta.
(B) Sólo las afirmaciones I y II son correctas.
(C) Sólo las afirmaciones III y IV son correctas.
(D) Sólo la afirmación III es correcta.
(E) Ninguna afirmación es correcta.

**2.** Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ y $f(x) = x + x^2\,\mathrm{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$. Entonces:

(A) $f$ no es continua ni derivable en 0.
(B) $f$ es continua pero no derivable en 0.
(C) $f$ es derivable en 0, $f'(0) = 0$, y además $f$ es $C^1$.
(D) $f$ es derivable en 0, $f'(0) = 1$, y además $f$ es $C^1$.
(E) $f$ es derivable en 0, $f'(0) = 1$, pero $f$ no es $C^1$.

(Se recuerda que una función es $C^1$ cuando es continua y derivable, con derivada continua.)

**3.** La integral $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt$ vale:

(A) $\pi/4$
(B) $1$
(C) $\pi/2$
(D) $\pi$
(E) $2\pi$

**4.** Sea $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x (t^2+t)e^{-t^2}dt$. Entonces la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{F(x)}}\,dx$:

(A) Es divergente.
(B) Converge a $F(1)$.
(C) Converge a $0$.
(D) Converge a $1$.
(E) Converge a $\frac{1}{\sqrt{F(1)}}$.

**5.** Sea $\mathcal{E}$ la elipse definida por la ecuación $4x^2 + y^2 = 16$. Se considera un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes, y cuyos cuatro vértices pertenecen a $\mathcal{E}$. ¿Cuál es la mayor área que puede tener dicho rectángulo?

(A) $4$
(B) $4\sqrt{2}$
(C) $0$
(D) $8\sqrt{2}$
(E) $16$

## Primer ejercicio de desarrollo (Total: 25 puntos)

1. Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Demostrar que si $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ es constante.
2. Deducir que si $h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $(a,b)$ tales que $h_1(a) = h_2(a)$ y $h_1'(x) = h_2'(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces estas dos funciones son iguales: $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Ahora, se considera una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$. En particular, la función $f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$, y tiene una función inversa $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$. El objetivo del ejercicio es demostrar que:

$$(*) \qquad \int_a^b f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt \;=\; bf(b) - af(a)$$

Para ello, se consideran las funciones $h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad h_2(x) = xf(x) - af(a)$$

**3.** Demostrar que las dos funciones $h_1, h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son derivables en $(a, b)$, y que tienen derivadas iguales: $h_1'(x) = h_2'(x)$ para todo $x \in (a, b)$.
**4.** Deducir que $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$, así como la igualdad $(*)$
**5.** Dar una interpretación geométrica de la igualdad $(*)$, bosquejando e interpretando los dos sumandos de la izquierda y el termino de la derecha

## Segundo ejercicio de desarrollo (Total: 25 puntos)

**1.** Demostrar que, para todo $x > 0$, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge a un número $> 1$.
(Si utiliza algún teorema, enúncielo claramente.)

Para todos $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, se considera la suma parcial

$$s_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,\cdot$$

En lo siguiente, se admite (sin demostrarla) la siguiente propiedad:

$(*)$ $$s_n(x+y) \;\leq\; s_n(x)s_n(y) \;\leq\; s_{2n}(x+y) \qquad \text{(para todos } x, y > 0,\ n \in \mathbb{N}\text{)}$$

Se define la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1/f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**2.** Usando la propiedad $(*)$, demostrar que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todos $x, y > 0$.
**3.** Deducir más generalmente que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.
**4.** Demostrar que $0 \leq s_n(x) - 1 \leq x\, f(x)$ para todos $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.
**5.** Deducir que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
**6.** Deducir de lo anterior que la función $f$ es continua en todo punto $a \in \mathbb{R}$.