# Ecuación diofántica $m^n = a^n + b^n$ con $n$ simple impar

Resumen
Mediante Álgebra y Aritmética ordinarias se examina en este trabajo la posibilidad de hallar las soluciones enteras y positivas de la ecuación diofántica $m^n = a^n + b^n$ con $n > 2$ primo. Se demuestra que para los casos posibles, $b$ par, $a$ par y $m$ par, si los enteros $m$, $a$, $b$, son solución, los enteros $b^n/(m-a)$ , $a^n/(m-b)$ y $m^n/(a+b)$ deben satisfacer las igualdades,

$$b^n/(m-a) = r\,\beta_0^n = r^2\,\beta_0^n = \ldots = r^{n-1}\,\beta_0^n,$$
$$a^n/(m-b) = s\,\alpha_0^n = s^2\,\alpha_0^n = \ldots = s^{n-1}\,\alpha_0^n,$$
$$m^n/(a+b) = t\,\mu_0^n = t^2\,\mu_0^n = \ldots = t^{n-1}\,\mu_0^n,$$

con $r$, $s$, $t$ impares distintos de 1 que cumplen las relaciones,

$$2^u r = (b, m-a),\ 2^v s = (a, m-b),\ 2^w t = (m, a+b).$$

Dado que tales igualdades solo son posibles si $r$, $s$, $t$ son idénticamente iguales a 1, se concluye que la ecuación $m^n = a^n + b^n$ con $n > 2$ primo no puede tener soluciones enteras.

## 1.- Consideraciones previas

Los enteros positivos $m$, $a$, $b$, si son solución de la ecuación con exponente $n$ simple impar,

$$m^n = a^n + b^n, \qquad (1)$$

satisfacen las condiciones siguientes.
Por ser $n$ entero $m^n - a^n$ es divisible por $m - a$ y $m^n - b^n$ es divisible por $m - b$, y por ser $n$ impar, $a^n + b^n$ es divisible por $a + b$. Dos de los números solución deben ser impares y el tercero par. Basta considerar el caso en que $m$, $a$, $b$, son primos entre si dos a dos, es decir, las soluciones primitivas, y los supuestos $b$ par, $a$ par, $m$ par, correspondientes respectivamente con $m - a$, $m - b$ y $a + b$ pares.
Como $m$ es el mayor de la terna solución, si suponemos que es $a > b$ se podrá establecer,

$$a + b > m > a > b > m - a.$$

Siendo $n$ simple, $m$, $a$, $b$, verificarán las congruencias módulo $n$,

$$m^n = m + n\,M,\ \ a^n = a + n\,A,\ \ b^n = b + n\,B,$$

y si (1) tiene solución, se cumple la congruencia módulo $n$,

$$b = m - a + n\,d, \qquad (2)$$

relación que confirma las desigualdades anteriores y muestra que las soluciones posibles de la ecuación (1) estarían formadas por números $m$, $a$, $b$, mayores que $n$.

## 2.- Formas de $b$ par y $m - a$ par

Se analiza a continuación la forma explícita de los números pares $b$ y $m - a$.
La descomposición en factores simples de $b$, de acuerdo con el teorema fundamental de la Aritmética, es el producto de una potencia de 2 por el producto de simples impares y se reduce a $b = 2^\varphi\,\beta$, donde $\beta$ es un número impar que en principio puede ser igual a la unidad, y $\varphi$ es el

máximo exponente de 2 en la factorización de $b$; además, como $m^n - a^n$ es divisible por $m - a$ porque $n$ es entero, si se cumple la ecuación (1) $b^n$ debe ser divisible por $m - a$, y para el entero $b^n/(m - a)$ se tendrá,

$$\frac{b^n}{m-a} = \frac{m^n - a^n}{m-a} = m^{n-1} + m^{n-2}a + m^{n-3}a^2 + \ldots + m^n a^{n-2} + a^{n-1} \quad \text{impar} \qquad (3)$$

$b^n/(m - a)$ debe ser impar pues es suma de un número impar, $n$, de sumandos impares. La expresión (3) muestra por tanto que $b^n = m^n - a^n$ y $m - a$ tienen idéntica potencia de 2 en su factorización en simples, y será $m - a = 2^{n\varphi}\gamma$ donde es $\gamma$ impar a determinar.
Como $m - a$ es divisor de $b^n$ si la ecuación (1) tiene solución, los números $b$ y $m - a$ poseen un factor común. Si $P_0 = (b, m - a)$, es $b = P_0\beta_0$ y $m - a = P_0\gamma_0$ con $\beta_0$ y $\gamma_0$ primos entre si, y el entero impar $b^n/(m - a)$ será también,

$$b^n/(m - a) = P_0^{n-1}\beta_0^n / \gamma_0 = k\beta_0^n, \qquad (3')$$

donde $k = P_0^{n-1}/\gamma_0$ y $\beta_0$ deben ser impares.
Por otro lado, la diferencia $m^n - a^n$ con $m$ y $a$ impares, como se cumple (1) es $(2^\varphi\beta)^n$ múltiplo de 4. Ahora bien, los impares positivos $m$ y $a$ pueden ser de la forma $4N + 1$, ($N = 0, 1, 2...$) invariante al tomar sus potencias enteras, o $4N - 1$, ($N = 1, 2,...$) invariante al tomar sus potencias de exponente entero impar, por lo tanto $m$ y $a$ deben ser de la misma forma y resultará $m - a = 4\rho$ y $P_0 = (2^\varphi\beta, 4\rho) = 2^u r$, con $u$ entero positivo y $r$ impar a determinar.
La (3') es,

$$b^n = (m - a)\, k\beta_0^n,$$

y si la terna $m$, $a$, $b$, es solución, deberá ser,

$$(m - a)\, k = P_0^n,$$

que con $m - a = 4\rho$ y $P_0 = 2^u r$, determina el factor $k$, entero positivo impar, como,

$$k = 2^{nu-2} r^n/\rho, \qquad \text{impar} \qquad (4)$$

y $k$ solo puede ser un número impar si es $\rho = 2^{nu-2} r^{n-j}$, con $j = 1, 2,..., n - 1$ y $r$ es impar distinto de 1.
Con esto se tendrá,

$$m - a = 2^{nu} r^{n-j} = 2^{n\varphi}\gamma,$$

y como $r$ y $\gamma$ son impares deberá ser, $u = \varphi$, y $\gamma = r^{n-j}$, y en consecuencia será $\gamma \neq 1$ producto de simples impares.
Para el impar $k$ de (4) resultará, $k = r^j$, e introduciendo este valor de $k$ en (3') será,

$$b^n / (m - a) = r^j \beta_0^n, \qquad (j = 1, 2,..., n - 1)$$

relación que debe ser cierta para todos los valores de $j$ especificados, pues todos ellos determinan el carácter impar del número $k$; tendrán que cumplirse por lo tanto las igualdades,

$$b^n / (m - a) = r\beta_0^n = r^2\beta_0^n = \ldots = r^{n-1}\beta_0^n,$$

solo posibles si $r = 1$, en oposición a la condición $r \neq 1$ que se acaba de obtener para el caso $b$ par; en consecuencia, la ecuación $m^n = a^n + b^n$ con $n > 2$ primo, en el caso $b$ par, carece de soluciones enteras.

3.- Formas de $a$ par y $m - b$ par

El procedimiento anterior es aplicable al caso $a$ par y $m - b$ par mediante las modificaciones correspondientes en los símbolos, así, con $a = 2^{\chi}\,\alpha$, $m - b = 2^{n\chi}\,\delta$ con $\delta$ impar producto de simples impares, se tiene sucesivamente,

$$m - b = 4\sigma,\ \ \sigma = 2^{n\nu-2}\,s^{n-j}\,,\ (j = 1, 2,..., n-1) \text{ y } s \neq 1 \quad \text{impar},$$

$$Q_0 = (a, m-b) = 2^{\nu}s,\ a = 2^{\nu}s\,\alpha_0,\ m - b = 2^{\nu}s\,\delta_0,$$

$$a^{n}/(m-b) = h\,\alpha_0^{n}, \qquad h = 2^{n\nu-2}\,s^{n}/\sigma = s^{j}, \quad (h \text{ impar})$$

y finalmente,

$$a^n/(m-b) = s\,\alpha_0^{n} = s^{2}\,\alpha_0^{n} = ... = s^{n-1}\,\alpha_0^{n},$$

igualdades imposibles con $s \neq 1$ y no habrá solución en enteros para la ecuación $m^n = a^n + b^n$ con $n > 2$ primo para el caso $a$ par.

4.- Formas de $m$ par y $a + b$ par

La descomposición en factores simples de $m$ es $m = 2^{\psi}\mu$, donde $\psi$ es el máximo exponente de 2 en la factorización y $\mu$ es producto de simples impares.

$(a^{n} + \underline{b}^{n}) / (a + b)$ es entero porque $n$ es entero impar y es en este caso,

$$\frac{a^n + b^n}{a+b} = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} a^{n-j} b^{j-1}\ . \qquad (5)$$

La sumatoria de (5) contiene un número impar $n$ de sumandos impares, de los cuales $(n + 1)/2$ son sumandos positivos y los otros $(n - 1)/2$ sumandos están afectados del signo menos. Siendo $(n + 1)/2 = 1 + (n - 1)/2$, si los positivos son en número par los negativos lo son en número impar y viceversa.

Se pueden dar dos casos: 1º El número de sumandos positivos es par y el de sumandos negativos es impar, 2º Los sumandos positivos son en número impar y los negativos lo son en número par. En el primer supuesto los sumandos impares positivos producen un número par y los impares negativos un número impar afectado de signo menos, y para la sumatoria resulta un número impar. En el segundo supuesto la suma de los sumandos impares positivos es un número impar y los sumandos impares negativos producen un número par afectado del signo menos y la sumatoria es un número impar.

La sumatoria de (5) es por lo tanto un número impar en los dos supuestos y si se cumple (1) es $m^n / (a + b)$ entero impar, y en la descomposición en factores simples de los números pares $m^n$ y $a + b$, las potencias de 2 son las mismas y será $a + b = 2^{n\psi}\varepsilon$, donde $\varepsilon$ es impar a determinar, producto de simples impares.

Como $a + b$ es divisor de $m^{n}$ si la ecuación (1) tiene solución, los números $a + b$ y $m$ poseen un factor común. Si $R_0 = (m, a + b)$, es $m = R_0\,\mu_0$ y $a + b = R_0\,\varepsilon_0$ con $\mu_0$ y $\varepsilon_0$ primos entre si, y el entero impar $m^{n}/(a + b)$ será también,

$$m^{n}/(a+b) = R_0^{n-1}\mu_0^{n} / \varepsilon_0 = f\,\mu_0^{n}, \qquad (3'')$$

donde $f = R_0^{n-1}/\varepsilon_0$ y $\mu_0$ deben ser impares.

Por otro lado la suma $a^{n} + b^{n}$ con $a$ y $b$ impares, debe ser múltiplo de 4 pues debe valer $(2^{\psi}\mu)^n$.

Los impares positivos $a$ y $b$ pueden ser de la forma $4N + 1$, $(N = 0, 1, 2...)$ invariante al tomar sus potencias enteras, o $4N - 1$, $(N = 1, 2,...)$ invariante al tomar sus potencias de exponente entero impar, por lo tanto $a$ y $b$ deben ser impares de forma distinta y será $a + b = 4\tau$ y $R_0 = (2^{\psi}\mu, 4\tau) = 2^{w}\,t$, con $t$ impar a determinar y $r$ entero positivo.

La relación (3") es,

$$m^n = (a+b) f \mu_0^n,$$

y si la terna $m$, $a$, $b$, es solución, deberá ser,

$$(a+b) f = R_0^n,$$

que con $a + b = 4\tau$ y $R_0 = 2^w t$, determina el factor $f$, entero positivo impar, como,

$$f = 2^{n\,w-2}\, t^n/\tau, \qquad \text{impar} \qquad (6)$$

y $f$ solo será un número impar si $\tau = 2^{n\,w-2}\, t^{n-j}$, con $j = 1, 2,..., n-1$ y $t$ es impar distinto de 1. Con esto se tendrá,

$$a + b = 2^{nw} t^{n-j} = 2^{n\psi}\varepsilon,$$

de donde, con $t \neq 1$ impar y $\varepsilon$ impar, se sigue $w = \psi$, y $\varepsilon = t^{n-j} \neq 1$.
Para el impar $f$ de (6) resultará, $f = t^j$, e introduciendo este valor de $f$ en (3") será,

$$m^n / (a+b) = t^j \mu_0^n, \qquad (j = 1, 2,..., n-1)$$

relación que debe ser cierta para todos los valores de $j$ especificados para que f sea impar; se verificarían con ello las igualdades siguientes,

$$m^n / (a+b) = t\,\mu_0^n = t^2 \mu_0^n = ... = t^{n-1} \mu_0^n,$$

igualdades solo posibles si $t = 1$ en oposición a la condición $t \neq 1$ que se acaba de obtener para $m$ par; en consecuencia, la ecuación $m^n = a^n + b^n$ con $n > 2$ primo en el caso $m$ par, carece de soluciones enteras.

3.- Conclusión

Mediante aritmética y álgebra elementales, se ha probado, salvo error u omisión, que la ecuación diofántica $m^n = a^n + b^n$ para $n$ primo impar, no tiene solución en $m$, $a$, $b$, enteros y positivos.

simpleimpar@gmail.com